تعريف (١-١٢):

إذا كانت G زمرة، $a,b \in G$ فيقال عن a أنها ترافق $\approx$ (Conjugate) b إذا وجد $x \in G$ بحيث أن $a=x^{-1}bx$ ويعبر عن ذلك بالشكل $a=b^x$

مثال (١-٢٤):

١) $G = D_4 = G = D_4 = \left\langle a, b \middle| a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \right\rangle$

فإن

a ترافق a^3 لأن $a = (a^3)^{ab}$

ab ترافق a^3b لأن $(ab) = (a^3b)^b$

a^2b ترافق b لأن $(a^2b) = (b)^a$

٢) إذا كانت $G=S_3$ فإن

(123) ترافق (123) لأن $(123) = (123)^{(1)}$

(12) ترافق (13) لأن $(12) = (13)^{(132)}$

(23) ترافق (13) لأن $(23) = (13)^{(123)}$

(132) ترافق (123) لأن $(132) = (123)^{(12)}$

نظرية (١-٢٧) :

إذا كانت G زمرة، $\approx$ علاقة معرفة على G كالتالي:

$a, b \in G$ وَ $a \approx b \Leftrightarrow a = b^x$ فإن $\approx$ علاقة تكافؤ على G.

ملاحظة:

بما ان كل علاقة تكافؤ على مجموعة تجزئ تلك المجموعة الى فصول تكافؤ. إذن علاقة التكافؤ $\approx$ تجزئ G إلى فصول تكافؤ، نسمي كلاً منها فصل ترافق (Conjugacy Class) ونرمز له بالرمز C_a.

$C_a \{x^{-1} ax \,|x \in G\}$

ملاحظة:

كل زمرة جزئية من الزمرة G مترافقة مع نفسها.

مثال (١-٢٥):

١) إذا كانت $G= S_3$ فإن فصول الترافق هي:

$C_1= \{(1)\}$,

$C_{(12)} = \{(12), (13), (23)\} = C_{(13)} = C_{(23)}$

$C_{(123)} = \{(123), (132)\} = C_{(132)}$

٢) $G = D_4 = \langle a, b | a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ فإن فصول الترافق هي:

$C_1= \{(1)\}$,

$C_a= \{(a,a^3\}= C_{a^3}$, $C_b = \{b,a^2b\} = C_{a^2b}$

$C_{a^2} = \{a^2\}$, $C_{ab} = \{ab, a^3b\}$

تعريف (١-١٣):

لتكن G زمرة تؤثر (من اليمين) على المجموعة X وليكن $a \in X$. يقال عن مجموعة عناصر G التي تدع a مستقرة (ثابته) أنها مثبت (stablizer) العنصر a ويرمز له عادة بالرمز $\text{stab}(a)$ أو G_a.

$$\therefore\ G_a = \{x \in G |\ a * x = a\}$$

أما إذا كانت G تؤثر على X من اليسار فإن :

$$\therefore\ G_a = \{x \in G |\ x * a = a\}$$

مثال (١-٢٦):

١) إذا كانت $G=S_3$ نجد أن G تؤثر على $X = \{1,2,3\}$

$$G_1 = \{f \in S_3 \mid f(1) = 1\} = \{(1), (23)\}$$

$$G_2 = \{f \in S_3 \mid f(2) = 2\} = \{(1), (13)\}$$

$$G_3 = \{f \in S_3 \mid f(3) = 3\} = \{(1), (12)\}$$

٢) إذا كانت H زمرة جزئية من G وعرّفنا $a * x = a\,x$

لكل $a \in G$، $x \in h$ فمن الواضح أن

H تؤثر على G ويكون

$$G_a = \{x \in H \,,\, ax = a\} = \{e\}$$

نظرية (١-٢٨):

إذا كانت G تؤثر من اليمين أو اليسار على X, $a \in X$ فإن $G_a \leq G$.

مثال (١- ٢٧):

في مثال $(1-26)$

١) نلاحظ أن كلاً من G_1, G_2, G_3 زمرة جزئية من G.

نتيجة (١-٩):

إذا كانت G زمرة، $a \in G$ فإن $C(a) \leq G$.

تعريف (١-١٤):

إذا كـــان a عنصـــرًا ثابتًـــا فـــي X فيقـــال عـــن فصـــل التكـــافؤ $arb\,(a) = \{a * x \mid x \in G\}$ للعنصـــر a وفـــق العلاقـــة $\approx$ أنـــه مـــدار (orbit) العنصر a في G.

نظرية (١-٢٩): Orbit Stabilizer Theorem:

إذا كانت G تؤثر (من اليمن أو اليسار) على $a\in x$,x فإن: $|orb(a)| = [G: G_a]$. وإذا كانت G زمرة منتهية فإن:

$$|G|=|arb(a)||G_a|$$

مثال (١-٢٨):

إذا كانت $G=S_3$ فإن $orb(1) = \{1,2,3\}$

$|orb(1)|=3$, $G_1=\{(1),(2\ 3)\}$ وعليه فإن $|G_1|=2$

$$\therefore |S_3| = |orb(1)||G_1| = 6$$

نتيجة (١-١٠):

إذا كانت G زمرة، $a\in G$ فإن $|C_a| = [G : C(a)]$.

نتيجة (١-١١):

إذا كانت G زمرة منتهية فإن: $|G| = \sum_{i=1}^{r} [G : C(a_i)]$.

نتيجة (١-١٢):

إذا كانت G زمرة منتهية $Z=(G)$ فإن: $|G| = |Z(G)| + \sum_{a_i\notin Z} |C_{ai}|$

ملاحظة:

تسمى المعادلة $|G| = \sum_{i=1}^{r} |G : C(a_i)| = |Z| + \sum_{a_i\notin Z} |C_{a_i}|$

معادلة فصول الترافق (The Class Equation) .

نظرية (١-٣٠):

إذا كانت G زمرة، p عدد أولي

١) إذا كانت $|G| = p^n$ فإن $Z(G) \neq \{e\}$، حيث e العنصر المحايد في G.

٢) إذا كانت $|G| = p^2$ فإن G إبدالية.

تعريف (١-١٥): (الزمرة الجزئية الناظمية Normal subgroup)

لتكن $H \leq G$ نقول أن H زمرة جزئية ناظمية من G إذا كان $aH=Ha$ لكل $a \in G$.

ملاحظات:

١) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G نكتب $H \lhd G$

٢) الزمرتان الجزئيتان $\{e\}$,G من الزمرة $(G,*)$ ناظميتان من الزمرة $(G,*)$.

٣) لتكن $H_2 \leq G$ ولتكن $H_1 \lhd G$ بحيث يكون $H_1 \subseteq H_2$ عندئذ الزمرة الجزئية الناظمية H_1 تكون زمرة جزئية ناظمية من الزمرة الجزئية H_2.

٤) إذا كانت $aH = Ha$ لا يعني بالضرورة أن $ah = ha$ لكل $a \in G$ وَ $h \in H$ ولكنه يعني أنه إذا كان $ah \in aH$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $ah= h_1a$.

٥) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $H \lhd G$ لكل $H \leq G$.

نظرية (١-٣١):

إذا كانت G زمرة، $H \leq G$ فإن العبارات التالية متكافئة:

١) $H \lhd G$.

٢) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1 x$.

٣) $x^{-1} h x \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

٤) $x^{-1} H x \subseteq H$ لكل $x \in G$.

٥) $x^{-1} Hx = H$ لكل $x \in G$.

٦) $(x H) (y H) = (xy) H$ لكل $x, y \in G$.

نتيجة (١-١٣):

إذا كانت G زمرة فإن $Z (G) \lhd G$.

مثال (١-٢٩):

١) إذا كانت $H = \langle (1 \quad 2) \rangle \leq S_3$ فإن:

$$(1 \quad 3) \circ H = \{(1 \quad 3),\ (1 \quad 2 \quad 3)\}$$
$$H \circ (1 \quad 3) = \{(1 \quad 3),\ (1 \quad 3 \quad 2)\}$$
$$(1 \quad 3) \circ H \neq H \circ (1 \quad 3)$$

$\therefore$ H ليست ناظمية من S_3.

بينما $K = \langle (1 \quad 2 \quad 3) \rangle \leq S_3$ فإن:

$$\sigma \circ K = K \circ \sigma \quad , \forall \sigma \in S_3$$

$\therefore$ K نظامية من S_3